Izabrani zadaci za vježbu sa rješenjima

Homogeni sistem

8.1 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Kako su svi koreni realni i različiti rešenje je oblika

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t},$$

gde su v_1, v_2, v_3 odgovarajući karakteristični vektori. U ovom slučaju rešenje je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t},$$

tj.

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

8.2 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = 1 - 2i$$

Imamo par konjugovano kompleksnih rešenja i sva rešenja su razlišita.

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 Re(v_2 e^{\lambda_2 t}) + c_3 Im(v_2 e^{\lambda_2 t}),$$

gde su v_1 i v_2 odgovarajući karakteristični vektori. Za λ_3 ne tražimo karakterističan vektor.

Imamo da je

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix}$$

Tada je

$$v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{bmatrix} 2e^t \cos 2t + i2e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t - ie^t \cos 2t \\ 3e^t \sin 2t - 3ie^t \cos 2t \end{bmatrix}$$

Konačno, rešenje je

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^t \cos 2t + c_3 2e^t \sin 2t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^t \sin 2t - c_3 e^t \cos 2t \\ z &= -c_1 e^t + c_2 3e^t \sin 2t - c_3 3e^t \cos 2t \end{aligned}$$

□

8.3 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Kako imamo višestruko koren, rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

gde su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k = r + s - n$, gde je r rang matrice $\lambda E - A$, s višestrukost korena, a n red sistema.

Tako je

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je rang matrice jednak 1. Red polinoma je $k = 1 + 3 - 3 = 1$. Rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \\ Et + F \end{bmatrix} e^t$$

Konstante A, B, C, D, E i F određujemo uvrštavanjem u sistem. Kako se radi o trostrukom korenu, tri konstante ćemo izraziti preko druge tri.

$$Ae^t + (At + B)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - (Et + F)e^t$$

$$Ce^t + (Ct + D)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - 2(Et + F)e^t$$

$$Ee^t + (Et + F)e^t = -(At + B)e^t + (Ct + D)e^t + 2(Et + F)e^t$$

Odatle dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} &A = C + E \\ &A = B - D - F \\ &C = 2B - 2D - 2F \\ &E = -B + D + F \end{aligned}$$

Rešavanjem dobijamo da je

$$A = -E \quad C = -2E \quad F = E + B - D$$

Proglasimo sada B,D i E za konstante c_1, c_2 i c_3 respektivno. Tada je

$$A = -c_3 \quad B = c_1 \quad C = -2c_3 \quad D = c_2 \quad E = c_3 \quad F = c_1 - c_2 + c_3,$$

pa je rešenje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3t + c_1 \\ -2c_3t + c_2 \\ c_3t + c_1 - c_2 + c_3 \end{bmatrix} e^t = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t+1 \end{bmatrix} e^t$$

□

8.4 Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} x'' &= 2x - 3y \\ y'' &= x - 2y \end{aligned}$$

Rešenje: Ovakvi sistemi se uvek mogu rešiti uvođenjem novih zavisnih promenljivih i svođenjem na siszem linearnih jednačina prvog read. U ovom slučaju sistem je oblika

$$\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= 2x - 3y \\ v' &= x - 2y \end{aligned}$$

Međutim, upošteno, kod homogenih sistema oblika

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + b_n y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + b_0 y = 0 \\ c_n x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + c_0 x + d_n y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + d_0 y = 0 \end{aligned}$$

do karaketrističnih korena dolazimo iz jednačine

$$\begin{vmatrix} a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0 \end{vmatrix} = 0,$$

a zatim do odgovarajućih karakterističnih vektora rešavajući sistem

$$\begin{bmatrix} a_n\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n\lambda_i^n + b_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n\lambda_i^n + d_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako se u našem slučaju sistem može zapisati

$$\begin{aligned} x'' - 2x - 3y = 0 \\ -x + y'' + 2y = 0 \end{aligned}$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & -3 \\ -1 & \lambda^2 + 2 \end{vmatrix} = 0$$

čije je rešenje

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i.$$

Odgovarajući karaktersistični vektori su

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dok v_4 ne tražimo. Kako je

$$v_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

rešenje je

$$\begin{aligned} x &= 3c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \end{aligned} .$$

□

Nehomogeni sistem

8.5 Metodom varijacije konstanti rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + \tfrac{1}{\cos t} \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Rešenje: Prvo rešimo homogen sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Njegovo rešenje je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_h &= c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Tada je rešenje nehomogenog sistema oblika

$$\begin{aligned} x &= c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t \\ y &= c_1(t)(\cos t + \sin t) + c_2(t)(\sin t - \cos t) \end{aligned} .$$

Funkcije $c_1(t)$ i $c_2(t)$ dobijamo iz sledećeg sistema lineranih jednačina

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t &= \tfrac{1}{\cos t} \\ c_1'(t)(\cos t + \sin t) + c_2'(t)(\sin t - \cos t) &= 0 \end{aligned} ,$$

gde nehomogeni deo ovog sistema je nehomogeni deo sistema diferencijalnih jednačina.

Sistem rešavamo Kramerovim pravilom. Tako je

$$D_S = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{c_1'} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos t} & \sin t \\ 0 & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = \frac{\sin t}{\cos t} - 1$$

$$D_{c_2'} = \begin{vmatrix} \cos t & \frac{1}{\cos t} \\ \cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

Stoga je

$$c_1'(t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$c_2'(t) = 1 + \frac{\sin t}{\cos t}$$

Dakle

$$c_1(t) = \int (1 - \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t + \ln|\cos t| + c_1$$

$$c_2(t) = \int (1 + \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t - \ln|\cos t| + c_2.$$

Rešenje je

$$\begin{aligned} x &= (t + \ln|\cos t| + c_1) \cos t + (t - \ln|\cos t| + c_2) \sin t \\ y &= (t + \ln|\cos t| + c_1)(\cos t + \sin t) + (t - \ln|\cos t| + c_2)(\sin t - \cos t) \end{aligned} .$$

8.6 Metodom pogađanja partikularnog rešenja rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z + \cos t \\ z' &= -x + y + 2z + e^t \end{aligned}$$

Rešenje: Rešavamo prvo homogen sistem i dobijamo da je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 + c_2e^t + c_3e^t \\ y_h &= 3c_1 + c_2e^t \\ z_h &= -c_1 + c_3e^t \end{aligned}$$

i karakteristični koreni su

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

Pogađačku metodu koristimo ako su svi nehomogeni delovi oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \text{ ili } P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

gde je $P_m(t)$ polinom reda m.

Tada je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gde su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k = m + l$, a l je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine.

Posmatrajmo prvo e^{2t}. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 2$, a $\beta = 0$, onda je i $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika:

$$\begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ z_{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Do konstanti A, B, C dolazimo uvrštavajući partikularno rešenje u sistem gde je od nehomogenih delova jedini preostao onaj koji posmatramo, tj.

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Tako dobijamo da je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ i $C = -\frac{1}{2}$.

Sada posmatramo $\cos t$. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 0$, a $\beta = 1$, imamo da je $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_2} \\ y_{p_2} \\ z_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \sin t.$$

Što se tiče e^t, imamo da je $\alpha = 1$, a $\beta = 0$, pa je $l = 2$. Stoga je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_3} \\ y_{p_3} \\ z_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_xt^2 + B_xt + C_x \\ A_yt^2 + B_yt + C_y \\ A_zt^2 + B_zt + C_z \end{bmatrix} e^t$$

U oba slučaja se do konstanti dolazi uvrštavanjem u sistem koji od nehomogenih delova ima samo onaj koji posmatramo.

□

8.7 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z + t \\ y' &= x + y - z - (t^2 + 1)\sin t \\ z' &= 2z - y \end{aligned}$$

8.8 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + \operatorname{tg} t \\ y' &= 3x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y + \operatorname{ctg} t \end{aligned}$$

8.9 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y + t\cos t \\ y' &= x + 2z + e^t\sin t \\ z' &= y - 2x - z \end{aligned}$$